La réciproque f^{-1} d'une fonction bijective f.

Soit une fonction $f(x) = y = 3x + 7$ avec domaine D. En isolant la variable x on obtient une autre fonction

$$\begin{aligned} x &= \frac{y-7}{3} \\ &= \frac{1}{3}y - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

- Nous pouvons exprimer cette autre fonction de la façon suivante (afin de garder x comme variable indépendante):

$$g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}.$$

  - On peut dire que $g(x) = y$ si et seulement si $f(y) = x$.
    - Vérifions: si $x = 1$, $g(1) = \frac{1}{3}(1) - \frac{7}{3} = \frac{-6}{3} = -2$. Aussi $f(-2) = (3)(-2) + 7 = -6 + 7 = 1$.
    - Donc comme prévu $g(1) = -2 \Leftrightarrow f(-2) = 1$.
    - On remarque également que $f(g(1)) = 1$.

- Puisque nous avons obtenu la fonction $g(x)$ à partir de $f(x)$ on peut dire que ces deux fonctions sont reliées. Nous définissons les fonctions qui sont ainsi reliées d'une façon particulière:

  Si une fonction $f(x)$ est bijective (biunivoque) il existe une autre fonction, dénotée par $f^{-1}(x)$ telle que

  $$f^{-1}(x) = y \text{ si et seulement si } f(y) = x.$$

  La fonction f^{-1} est appelée la *fonction réciproque* de f

  - Par exemple, soit la fonction $f(x) = x^2$ avec domaine $D = \{x : x \geq 0\}$.
    - On voit que cette fonction est bijective sur l'ensemble choisi comme son domaine.
    - On voit également que $f(x) = x^2 = y \Leftrightarrow \sqrt{y} = x$ (puisque x n'est pas négatif sur ce domaine).
    - Donc la réciproque de la fonction bijective f est $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
    - Puisque on choisit normalement la variable x comme variable indépendante on écrit,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

- Nous faisons quelques observations importantes sur la notion de fonctions réciproques.
  - À partir de la définition on voit que f^{-1} est la réproque de f si et seulement si f est la réciproque de f^{-1}. Donc on peut écrire $(f^{-1})^{-1} = f$.
  - L'ensemble qui représente le domaine de la fonction f devient l'image de sa réciproque f^{-1}. Aussi l'ensemble R qui représente l'image de f devient le domaine de sa réciproque f^{-1}
    * Donc si la fonction $f : D \to R$ est bijective sur son domaine D la fonction $f^{-1} : R \to D$ est bijective sur son domaine R.
      · Par exemple, soit la fonction $f(x) = (x+1)^2 = y$ avec domaine $D = \{x : x \geq -1\}$.
      · L'image R de cette fonction est $R = \{x : x \geq 0\}$ (puisque $f(x)$ peut prendre n'importe quelle valeur non-négative).
      · On voit que cette fonction est bijective sur l'ensemble D choisi comme son domaine.
      · On voit également que $f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$ et donc la fonction réciproque de f est
      $$f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1.$$
      · On constate que le domaine de $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$ est $R = \{x : x \geq 0\}$ et son image est $D = \{x : x \geq -1\}$.
    * En étudiant les graphiques à la Figure 1 des deux fonctions $f(x) = (x+1)^2$ et $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$ on constate une propriété intéressante au sujet de la courbe de la fonction réciproque: Les deux courbes sont symétriques par rapport à la diagonale $y = x$.

- Nous énonçons les propriétés fondamentales de la fonction réciproque f^{-1} par rapport à la fonction f:

  1. Seules les fonctions bijectives peuvent avoir une fonction réciproque.
  2. Si D est le domaine d'une fonction bijective, D est l'image de sa fonction réciproque f^{-1}.
  3. Si R est l'image d'une fonction bijective f, R est le domaine de sa fonction réciproque f^{-1}.
  4. Si $f : D \to R$ est une fonction bijective sur D, $f(f^{-1}(x)) = x$ pour tout x dans R et $f^{-1}((f(x)) = x$ pour tout x dans D.
  5. La courbe de $f^{-1}(x)$ dans le plan carésien est symétrique à la courbe de $f(x)$ par rapport à la diagonale $y = x$.

- Comme deuxième exemple voir le graphique de la réciproque, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$, de la fonction $f(x) = 2x + 3$ à la Figure 2.

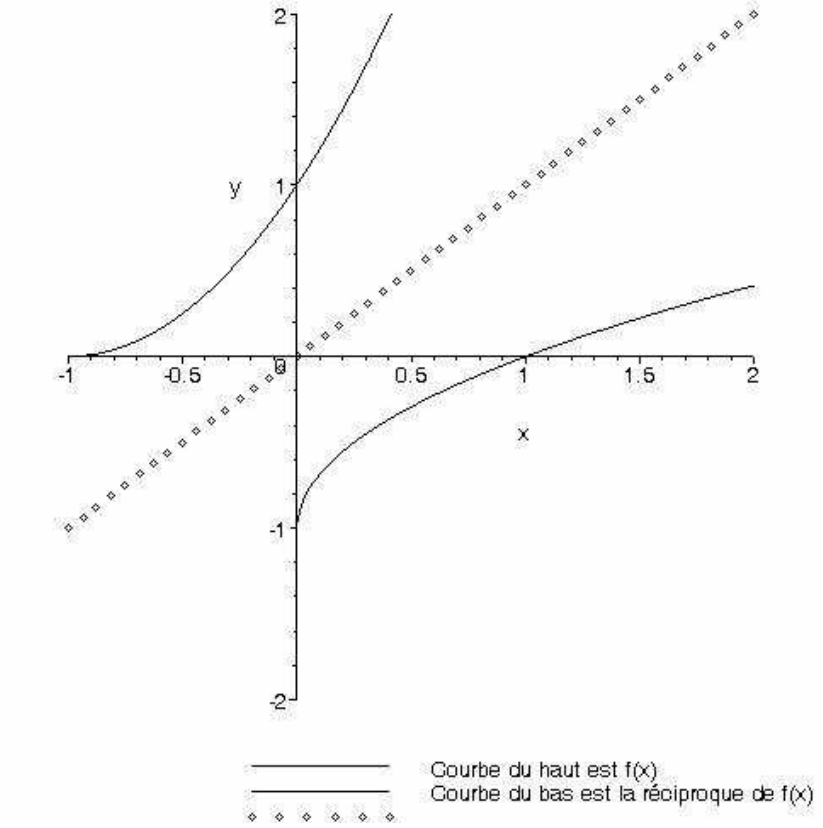

Figure 1: La fonction $f(x) = (x+1)^2$ et sa réciproque.

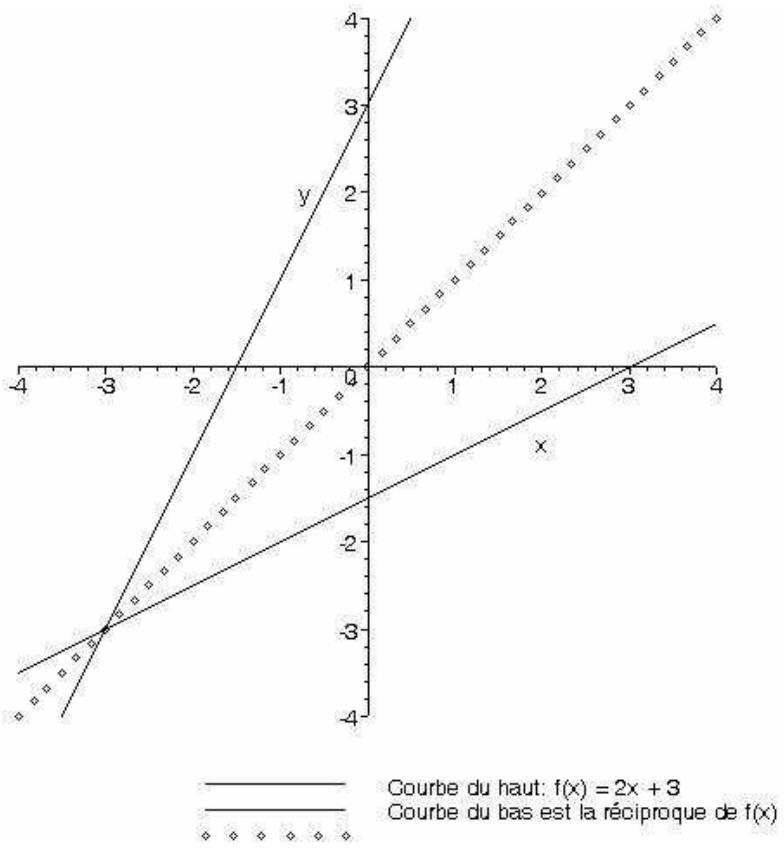

Figure 2: La fonction $f(x) = 2x + 3$ et sa réciproque.